

УДК 551.521

<https://doi.org/10.32634/0869-8155-2022-359-5-63-66>

исследования/ research

**Асадов Х.Г.,
Махмудова В.Х.**

Национальное аэрокосмическое агентство,
AZ1145, Республика Азербайджан, г. Баку,
ул. С.С. Ахундова, стр. 1
E-mail: asadzade@rambler.ru

Ключевые слова: радиационная модель, оптимизация, рост растений, фотосинтез, фотосинтетически активная радиация, излучение, модель

Для цитирования: Асадов Х.Г., Махмудова В.Х. Синтез оптимальной радиационной модели роста растений по критерию минимума передающейся в почву интегральной солнечной радиации. *Аграрная наука*. 2022; 359 (5): 63–66.

<https://doi.org/10.32634/0869-8155-2022-359-5-63-66>

Авторы в равной степени принимали участие в написании рукописи, несут равную ответственность за плагиат и представленные данные.

Авторы объявили, что нет никаких конфликтов интересов.

**Gikmat H. Asadov,
Valida Kh. Mahmudova**

National Aerospace Agency, AZ1145, Republic of
Azerbaijan, Baku, S.S. Akhundova st., p. 1
E-mail: asadzade@rambler.ru

Key words: radiation model, optimization, plant growth, photosynthesis, photosynthetically active radiation, radiation, model

For citation: Asadov H.H., Makhmudova V.H. Synthesis of an optimal radiation model of plant growth according to the criterion of the minimum of integral solar radiation transmitted to the soil. *Agrarian Science*. 2022; 359 (5): 63–66. (In Russ.)

<https://doi.org/10.32634/0869-8155-2022-359-5-63-66>

The authors were equally involved in writing the manuscript and bear the equal responsibility for plagiarism and presented data.

The authors declare no conflict of interest.

Синтез оптимальной радиационной модели роста растений по критерию минимума передающейся в почву интегральной солнечной радиации

РЕЗЮМЕ

Актуальность. На основе спутниковых данных дистанционного зондирования было высказано предположение о том, что между NDVI и FPAR имеется линейная связь. Однако значительное влияние на эту взаимосвязь сезонных факторов конкретной экосистемы создает неопределенность в оценке продуктивности растений средствами дистанционного зондирования. Эта неопределенность оценок общей выращенной продукции (GPP) по показателю, вычисляемому как отношение GPP к поглощенной растительностью фотосинтетически активной радиации, может быть объяснена суточными изменениями поступающей оптической радиации как по составу, так и по величине. Показано, что показатель GPP может быть определен косвенно путем вычисления экстремума теплового потока почвы, поступающего извне.

Методы. Предложен новый подход к синтезу оптимального радиационного режима роста растений, базирующийся на методологии оптимизации изоморфно-голомонных систем. Основу предлагаемого метода синтеза радиационного режима роста растений составляет учет суммарной радиации, поступающей сверху на крону растения. Особенность этого подхода заключается в поиске минимума той части внешне поступающей фотосинтетически активной радиации, которая достигает почвы и не тратится на фотосинтез при условии гарантированного производства исходно заданного продукта. Сформулирована оптимизационная задача достижения экстремальной величины суммарной радиации, поступающей извне в почву, в виде задачи безусловной вариационной оптимизации с общим целевым функционалом оптимизации. Дано примерное решение оптимизационной задачи, при которой целевой функционал достигает минимума, т.е. максимальное количество внешней радиации расходуется на процесс фотосинтеза.

Результаты. Получено решение, при котором целевой функционал достигает минимума, т.е. максимальное количество внешней радиации расходуется на процесс фотосинтеза. Показано, что применение известного способа безусловной вариационной оптимизации при гарантированной заданной величине GPP позволяет определить оптимальный радиационный режим роста растений.

Synthesis of an optimal radiation model of plant growth according to the criterion of the minimum of integral solar radiation transmitted to the soil

ABSTRACT

Relevance. Based on satellite remote sensing data, it has been suggested that there is a linear relationship between NDVI and FPAR. However, the significant influence of seasonal factors of a particular ecosystem on this relationship creates uncertainty in the assessment of plant productivity by remote sensing. This uncertainty in the estimates of total grown products (GPP) by the indicator calculated as the ratio of GPP to photosynthetically active radiation absorbed by vegetation can be explained by daily changes in incoming optical radiation both in composition and magnitude. It is shown that the GPP indicator can be determined indirectly by calculating the extremum of the heat flow of the soil coming from the outside.

Methods. A new approach to the synthesis of the optimal radiation regime of plant growth based on the methodology of optimization of isomorphic-holonomic systems is proposed. The basis of the proposed method for the synthesis of the radiation regime of plant growth is taking into account the total radiation coming from above to the crown of the plant, the peculiarity of this approach is to find a minimum of that part of the externally incoming photosynthetically active radiation that reaches the soil and is not spent on photosynthesis, provided that the production of the initially specified product is guaranteed. The optimization problem of achieving an extreme value of the total radiation coming from outside into the soil is formulated in the form of an unconditional variational optimization problem with a common target optimization functional. An approximate solution of the optimization problem is given, in which the target functional reaches a minimum, i.e. the maximum amount of external radiation is spent on the photosynthesis process.

Results. A solution is obtained at which the target functional reaches a minimum, i.e. the maximum amount of external radiation is spent on the photosynthesis process. It is shown that the application of the known method of unconditional variational optimization with a guaranteed given value of GPP allows us to determine the optimal radiation regime of plant growth.

Поступила: 5 января 2022
Принята к публикации: 21 April 2022

Received: 5 January 2022
Accepted: 21 April 2022

Введение

Фотосинтез, происходящий в растениях, является процессом, включающим в себя поглощение растением фотосинтетически активной радиации (PAR) и преобразование поглощенной радиации в сухое органическое вещество [1]. Обычно PAR, поглощенная в диапазоне 400–700 нм, в целях фотосинтеза выражается фракционным показателем (FPAR), умноженным на поступающую извне радиацию. Следовательно, показатель FPAR отражает способность растения к поглощению поступающей сверху радиации. Показатель FPAR во многом определяет значение общей или чистой продуктивности растений. В модели эффективного использования света (LUE) показатель FPAR используется с учетом параметра, определяемого средствами дистанционного зондирования [2]. Основным недостатком модели LUE заключается в отсутствии учета взаимосвязи FPAR и нормализованного дифференциального разностного индекса (NDVI) [3]. На основе спутниковых данных дистанционного зондирования было высказано предположение о том, что между NDVI и FPAR имеется линейная связь [4]. Отмечено значительное влияние на эту взаимосвязь сезонных факторов конкретной экосистемы, что в конечном итоге создает неопределенность в оценке продуктивности растений средствами дистанционного зондирования [5]. Пространственно-временная изменчивость FPAR наиболее достоверно отражается при использовании усиленного вегетационного индекса (EVI), однако значения FPAR, полученные на полях и с помощью MODIS, значительно расходятся [6]. Неопределенность оценок общей выращенной продукции (GPP) по показателю LUE_{green} может быть объяснена суточными изменениями поступающей оптической радиации как по составу, так и по величине, где

$$LUE_{green} = \frac{GPP}{APAR_{green}}, \quad (1)$$

где LUE_{green} является количественной мерой эффективности превращения поглощенной радиации фотосинтетически активной «зеленой» растительностью в углерод; $APAR$ — радиация, поглощенная фотосинтетически активной «зеленой» растительностью [7].

При этом фракционный показатель поглощенной радиации такой активной растительностью $FPAR_{green}$ определяется как

$$FPAR_{green} = FPAR \left(\frac{LAI_{green}}{LAI_{общий}} \right) \quad (2)$$

где LAI_{green} — зеленый индекс LAI , которая является фотосинтетически функциональной компонентной $LAI_{общий}$.

На величину $APAR_{green}$ влияет большое количество факторов, связанных как с поступающей радиацией, так и с состоянием растительности и метеофакторами.

С учетом

$$FPAR = \frac{APAR}{PAR} \quad (3)$$

$$FPAR_{green} = \frac{APAR_{green}}{PAR} \quad (4)$$

а также выражения (2) получим

$$\frac{APAR_{green}}{APAR} = \frac{LAI_{green}}{LAI} \quad (5)$$

Из выражений (1) и (5) находим

$$GPP = \frac{LUE_{green} \cdot APAR \cdot LAI_{green}}{LAI}. \quad (6)$$

Таким образом, общая выращенная продукция может быть определена в зависимости от LAI_{green} по выражению (6) при известных значениях LUE_{green} , $APAR$ и LAI .

Из выражений (4) и (5) получим

$$\frac{LAI_{green}}{LAI} = \frac{FPAR_{green} \cdot PAR}{APAR}, \quad (7)$$

выражение (7) отражает общую прямо пропорциональную связь между LAI_{green} и $PAR \cdot FPAR_{green}$.

Следует отметить, что модель (1)–(7) направлена на вычисление величины GPP при известной величине показателя LUE . Вместе с тем, можно показать, что показатель GPP может быть определен косвенно путем вычисления экстремума теплового потока почвы, поступающего извне.

Предлагаемый метод

Основу предлагаемого метода синтеза радиационного режима роста растений составляет следующее известное выражение, определяющее суммарную радиацию R_n , поступающую сверху на крону растения, LAI_{green} и тепловой поток почвы G [9]

$$\frac{G}{R_n} = 0,183 \cdot \exp(-0,299LAI_{green}). \quad (8)$$

Общая схема предлагаемого метода иллюстрируется на рис. 1.

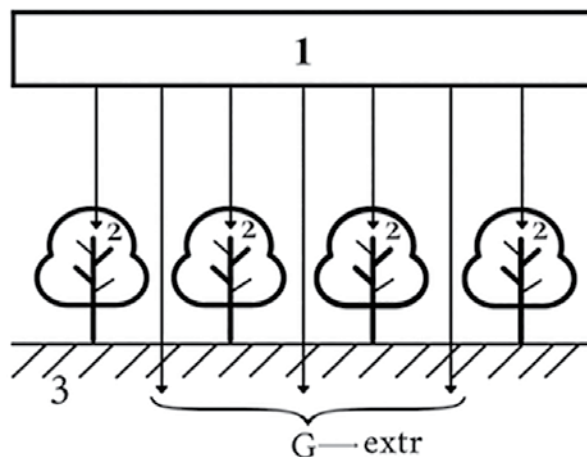
Основные положения предлагаемого метода соответствуют общей методологии оптимизации изоморфно-голономных систем, изложенной в [10, 11], и заключаются в следующем.

1. Вводится функциональная связь между показателями LAI_{green} и R_n в виде

$$LAI_{green} = \psi(R_n). \quad (9)$$

Рис. 1. Общая схема реализации предлагаемого метода. Цифрами обозначены: 1 — источник внешнего излучения; 2 — растительность; 3 — почва

Fig. 1. General scheme for the implementation of the proposed method. The numbers indicate: 1 — source of external radiation; 2 — vegetation; 3 — soil



Отметим, что взаимосвязь (9) или обратная взаимосвязь

$$(R_n) = \psi^{-1}(LAI_{green}) \quad (10)$$

технологически реализуемы не только в парниковых хозяйствах, но и в натуральном растениеводстве в смысле подбора сортов растений с требуемым характером зависимости (9).

2. Задаётся условие достижения заданной величины суммарной продукции. В выражении (9) условно приняв

$$\frac{LUE_{green} \cdot APAR}{LAI} = C_1 \quad C_1 = const \quad (11)$$

получим

$$GPP = C_1 \cdot LAI_{green} \quad (12)$$

Следовательно, суммарный продукт, извлекаемый за определенный период фенологического роста GPP_c , определим как

$$GPP_c = \int_{R_{nmin}}^{R_{nmax}} \psi(R_n) dR_n = C_2 \quad (13)$$

где C_2 — задаваемая величина требуемого объема суммарного продукта.

3. Формулируется задача достижения экстремальной величины суммарной радиации (G_c), поступающей извне в почву, т.е.

$$G_c = \int_{R_{nmin}}^{R_{nmax}} R_n \cdot 0,183 \cdot \exp[-0,299\psi(R_n)] dR_n. \quad (14)$$

4. Составляется задача безусловной вариационной оптимизации с учетом выражений (13) и (14). Общий целевой функционал оптимизации Φ имеет вид

$$\Phi = \int_{R_{nmin}}^{R_{nmax}} 0,183 R_n \cdot \exp[-0,299\psi(R_n)] dR_n + \lambda \left[\int_{R_{nmin}}^{R_{nmax}} \psi(R_n) dR_n - C_2 \right], \quad (15)$$

где λ — множитель Лагранжа.

Таким образом, предлагаемый метод синтеза оптимальной радиационной модели роста растений предполагает решение вариационной задачи (15). Дадим модельное решение данной задачи.

Модельное исследование

Для упрощения математических выкладок примем $R_{nmin} = 0$.

Решение оптимизационной задачи (15) согласно методу Эйлера должно удовлетворить условию

$$\frac{\partial \{0,183 R_n \cdot \exp[-0,299 \cdot \psi(R_n)] + \lambda \cdot \psi(R_n)\}}{\partial \psi(R_n)} = 0. \quad (16)$$

Из выражения (16) получаем:

$$-0,55 \cdot R_n \cdot \exp[-0,299 \cdot \psi(R_n)] + \lambda = 0. \quad (17)$$

Из (17) находим

$$\exp[-0,299 \cdot \psi(R_n)] = \frac{\lambda}{0,55 \cdot R_n}. \quad (18)$$

Из выражения (18) имеем

$$\psi(R_n) = \frac{1}{0,299} \ln \left(\frac{0,55 \cdot R_n}{\lambda} \right). \quad (19)$$

С учетом выражений (13) и (19) получим

$$\frac{1}{0,299} \int_0^{R_{nmax}} \ln \left(\frac{0,55 \cdot R_n}{\lambda} \right) dR_n = C_2. \quad (20)$$

Из выражения (20) имеем

$$\int_0^{R_{nmax}} \ln(0,55 R_n) dR_n - \int_0^{R_{nmax}} \ln \lambda dR_n = C_2 \cdot 0,299. \quad (21)$$

Из выражения (21) находим

$$(\ln \lambda) \cdot \int_0^{R_{nmax}} dR_n = \int_0^{R_{nmax}} \ln(0,55 R_n) dR_n - C_2 \cdot 0,299 \quad (22)$$

или

$$\lambda = \exp \left[\frac{\int_0^{R_{nmax}} \ln(0,55 R_n) dR_n - C_2 \cdot 0,299}{R_{nmax}} \right]. \quad (23)$$

С учетом выражений (19) и (23) получим

$$\begin{aligned} \psi(R_n) &= \frac{1}{0,299} \times \\ &\times \ln \left[\frac{0,55 \cdot R_n}{\exp \left[\frac{1}{R_{nmax}} \left(\int_0^{R_{nmax}} \ln(0,55 R_n) dR_n - C_2 \right) \right]} \right] = \\ &= \frac{1}{0,299} \left[\ln 0,55 \cdot R_n - \frac{1}{R_{nmax}} \left(\int_0^{R_{nmax}} \ln(0,55 R_n) dR_n - C_2 \right) \right]. \quad (24) \end{aligned}$$

Обозначим

$$\frac{1}{R_{nmax}} \left[\int_0^{R_{nmax}} \ln(0,55 R_n) dR_n - C_2 \right] = C_3 \quad (25)$$

Из (24) получим

$$\psi(R_n) = \frac{1}{0,299} [\ln 0,55 R_n - C_3] \quad (26)$$

Следовательно, при решении (26) целевой функционал (15) достигает экстремума.

Проверим тип экстремума функционала (15). Для этого достаточно определить знак контрольной величины C_4 , где

$$C_4 = \frac{\partial^2 \{0,183 \cdot R_n \exp[-0,299\psi(R_n)] + \lambda \cdot \psi(R_n)\}}{\partial \psi(R_n)^2} \quad (27)$$

и убедиться, что C_4 всегда положительна.

Следовательно, при решении (26) целевой функционал достигает минимума, т.е. максимальное количество внешней радиации расходуется на процесс фотосинтеза. Представим

$$C_2 = \ln C_3$$

Выражение (26) перепишем как

$$\psi(R_n) = \frac{1}{0,299} \cdot \ln \left[\frac{0,55 R_n}{C_3} \right]. \quad (28)$$

С учетом выражений (14) и (28) находим (при $R_{nmin} = 0$):

$$G_c = \int_0^{R_{nmax}} R_n \cdot 0,183 \cdot \exp \left[\frac{-0,299}{0,299} \cdot \ln \left[\frac{-0,55 R_n}{C_3} \right] \right] dR_n =$$

$$= \int_0^{R_{nmax}} \left[R_n \cdot 0,183 \cdot \frac{C_3}{0,55 R_n} \right] dR_n = \frac{C_3 \cdot 0,183 \cdot R_{nmax}}{0,55}. \quad (29)$$

Таким образом, в оптимальном радиационном режиме в почву поступает суммарная радиация, определяемая выражением (29).

ЛИТЕРАТУРА

1. Feng Zhang, Guangsheng Zhou and Christer Nilsson. Remote estimation of the fraction of absorbed photosynthetically active radiation for a maize canopy in Northeast China. *Journal of Plant Ecology* - 2015. Vol. 8. No.4, pp. 429-435.
2. Field CB, Randerson JT, Malmström CM (1995) Global net primary production: combining ecology and remote sensing. *Remote Sens Environ* 51:74-88.
3. Zhang F., Zhou G, Wang Y (2008) Dynamics simulation of net primary productivity by a satellite data-driven CASA model in Inner Mongolian typical steppe, China. *J Plant Ecol* 32:786-97.
4. Vina A, Gitelson AA (2005) New developments in the remote estimation of the fraction of absorbed photosynthetically active radiation in crops *Geophys Res Lett* 32:L17403.
5. Fensholt R, Sandholt I, Rasmussen MS (2004) Evaluation of MODIS LAI, fAPAR and the relation between fAPAR and NDVI in a semiarid environment using in situ measurements. *Remote Sens Environ* 91:490-507.
6. Hiroki Iwata, Masahito Ueyama, Chie Iwama, Yoshinobu Harazono. A variation in the fraction of absorbed photosynthetically active radiation and a comparison with MODIS data in burned black spruce forests of interior Alaska. *Polar Science* 7 (2013) 113-124. <http://ees.elsevier.com/polar>
7. Anatoly A. Gitelson, Yi Peng, Timothy J. Arkebauer, and Andrew E. Suyker. Productivity, absorbed photosynthetically active radiation, and light use efficiency in crops: Implications for remote sensing of crop primary production. Published in *Journal of Plant Physiology* 177 (2015), pp. 100-109; doi 10.1016/j.jplph.2014.12.015.
8. Mo, X., Liu, S., Lin, Z., Zhao, W., 2004. Simulating temporal and spatial variation of evapotranspiration over the Luch Basin. *J. Hydrol.* 285 (1-4), 125-142.
9. X. Mo, S. Liu, Z. Lin, YXu, YXiang, T.R. McVicar. Prediction of crop yield, water consumption and water use efficiency with a SVAT-crop growth model using remotely sensed data on the North China Plain / *Ecological Modeling* 183 (2005) 301-322.
10. Асадов Х.Г., Абдуллаева С.Н., Тарвердиева У.Х. Метод саризационной оптимизации голономных информационно – измерительных и мехатронных систем. «Вестник ПНЦПУ. Электротехника. Информатика. Системы управления». 2020, №35, стр.169-179.
11. Асадов Х.Г., Абдуллаева С.Н., Тарвердиева У.Х. Вопросы оптимизации изоморфно информационно – измерительных систем. «Известия Вузов. Электромеханика». 2020, Т.63, №6, стр.51-56.

ОБ АВТОРАХ:

Асадов Хикмет. Г., доктор технических наук, Национальное аэрокосмическое агентство, Азербайджанская Республика, г. Баку, ул. С.С. Ахундова, стр. 1
e-mail: asadzade@rambler.ru
Махмудова В.Х. кандидат технических наук, Национальное аэрокосмическое агентство, Азербайджанская Республика, г. Баку, ул. С.С. Ахундова, стр.1
e-mail: asadzade@rambler.ru

Выводы

Предложен новый метод синтеза оптимального радиационного режима роста растения, базирующийся на методологии оптимизации изоморфно-голономных систем. Основная особенность предложенного метода заключается в поиске минимума той части внешне поступающей фотосинтетически активной радиации, которая передается в почву и не тратится на фотосинтез при условии гарантированного производства исходно заданного продукта. Решение задачи с использованием процедуры безусловной вариационной оптимизации позволило определить оптимальный радиационный режим роста растений.

REFERENCES

1. Feng Zhang, Guangsheng Zhou and Christer Nilsson. Remote estimation of the fraction of absorbed photosynthetically active radiation for a maize canopy in Northeast China. *Journal of Plant Ecology* - 2015. Vol. 8. No.4, pp. 429-435.
2. Field CB, Randerson JT, Malmström CM (1995) Global net primary production: combining ecology and remote sensing. *Remote Sens Environ* 51:74-88.
3. Zhang F., Zhou G, Wang Y (2008) Dynamics simulation of net primary productivity by a satellite data-driven CASA model in Inner Mongolian typical steppe, China. *J Plant Ecol* 32:786-97.
4. Vina A, Gitelson AA (2005) New developments in the remote estimation of the fraction of absorbed photosynthetically active radiation in crops *Geophys Res Lett* 32:L17403.
5. Fensholt R, Sandholt I, Rasmussen MS (2004) Evaluation of MODIS LAI, fAPAR and the relation between fAPAR and NDVI in a semiarid environment using in situ measurements. *Remote Sens Environ* 91:490-507.
6. Hiroki Iwata, Masahito Ueyama, Chie Iwama, Yoshinobu Harazono. A variation in the fraction of absorbed photosynthetically active radiation and a comparison with MODIS data in burned black spruce forests of interior Alaska. *Polar Science* 7 (2013) 113-124. <http://ees.elsevier.com/polar>
7. Anatoly A. Gitelson, Yi Peng, Timothy J. Arkebauer, and Andrew E. Suyker. Productivity, absorbed photosynthetically active radiation, and light use efficiency in crops: Implications for remote sensing of crop primary production. Published in *Journal of Plant Physiology* 177 (2015), pp. 100-109; doi 10.1016/j.jplph.2014.12.015.
8. Mo, X., Liu, S., Lin, Z., Zhao, W., 2004. Simulating temporal and spatial variation of evapotranspiration over the Luch Basin. *J. Hydrol.* 285 (1-4), 125-142.
9. X. Mo, S. Liu, Z. Lin, YXu, YXiang, T.R. McVicar. Prediction of crop yield, water consumption and water use efficiency with a SVAT-crop growth model using remotely sensed data on the North China Plain / *Ecological Modeling* 183 (2005) 301-322.
10. Asadov Kh.G., Abdullaeva S.N., Tarverdieva U.Kh. Sarization optimization method for holonomic information-measuring and mechatronic systems. *Bulletin of PNTsPU. Electrical engineering. Informatics. Control systems*. 2020, No. 35, pp. 169-179. (in Russ)
11. Asadov H.G., Abdullaeva S.N., Tarverdieva U.Kh. Issues of optimization of isomorphic information-measuring systems. "Izvestiya Vuzov. Electromechanics. 2020, Vol.63, No.6, pp.51-56. (in Russ)

ABOUT THE AUTHORS:

Asadov Khikmet G., doctor of technical sciences, National Aerospace Agency, Republic of Azerbaijan, Baku, st. S.S. Akhundov, b. 1, e-mail: asadzade@rambler.ru
Mahmudova V. Kh., Candidate of Technical Sciences, National Aerospace Agency, Republic of Azerbaijan, Baku, st. S.S. Akhundov, build.1, e-mail: asadzade@rambler.ru